

Exercice 21. ** Quand on écrit 4444^{4444} en base 10, la somme des chiffres vaut A . Soit B la somme des chiffres de A . Trouver la somme des chiffres de B (A et B sont écrits en base 10).

Exercice 22. * Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Montrer que $\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.

Exercice 23. *** (1) Soit G un groupe abélien fini.

- (a) Soient $x, y \in G$ d'ordre n et m respectivement. Montrer que si $\text{pgcd}(n, m) = 1$, l'élément xy est d'ordre nm .
 - (b) On note μ le ppcm des ordres des éléments de G . Montrer que G contient un élément d'ordre μ .
- (2) Montrer que si p est premier $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ est cyclique.
- (3) Soient p un nombre premier impair et $r \in \mathbf{N}_{>0}$.
- (a) Montrer que $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^\times$ contient un élément d'ordre $p-1$.
 - (b) Montrer que si $k \in \mathbf{N}$, il existe $a_k \in \mathbf{N}$ non divisible par p tel que $(p+1)^{p^k} = 1 + p^{k+1}a_k$.
 - (c) En déduire le groupe $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^\times$ est cyclique.
- (4) Que se passe-t-il lorsque $p = 2$?